

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA Y SU RELACIÓN CON OTROS ELEMENTOS DEL CURRÍCULO

Este documento es una síntesis de dos documentos del informe PISA 2003:

.- Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.

.- PISA 2003. Pruebas de matemáticas y solución de problemas.

FINALIDAD

La finalidad del presente documento es la de aclarar conceptos relacionados con la **competencia matemática** y su relación con los otros **elementos del diseño curricular** (objetivos, contenidos, criterios de evaluación), cuando el profesor elabora las tareas del alumnado en el marco de la programación de aula y, sobre todo, dar luz sobre el porqué es necesario desarrollar una **estrategia de trabajo** para abordar la labor diaria de las competencias básicas con nuestro alumnado.

UTILIDAD

Este material puede utilizarse como primera toma de contacto para abordar la competencia matemática desde las diferentes materias y a modo de ejemplificación para diseñar actividades que tengan relación con dicha competencia y, en general, con cualquiera.

Es un material sencillo que puede utilizarse para el debate en las reuniones de ciclos, equipos de pedagógicos, etc., que se realizan en los centros.



MATERIALES PARA EL ASESORAMIENTO EN COMPETENCIAS BÁSICAS

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA Y SU RELACIÓN CON LOS OTROS ELEMENTOS DEL CURRÍCULO

Índice:

1. Alfabetización matemática.
2. Procesos matemáticos: matematización.
3. Definición de la competencia matemática.
4. Base teórica del marco conceptual de la competencia matemática.
 - 4.1. Situaciones o contextos
 - 4.2. Contenidos matemáticos
 - 4.3. Subcompetencias
 - 4.4. Nivel de complejidad de las tareas
 - 4.5. Recursos materiales y organización de la actividad.

Anexo I: subcompetencias y niveles de complejidad de las tareas (grupos de competencia).





1. Alfabetización matemática

Averse a pensar con ideas matemáticas es la descripción de un ciudadano matemáticamente ilustrado, versión actualizada del *sapere aude* establecido por Kant como signo distintivo de un pensamiento ilustrado. En sus relaciones con el mundo natural y social y en su vida cotidiana los ciudadanos se enfrentan regularmente a situaciones cuando hacen planes, presuponan y compran, viajan, se alimentan, cocinan, gestionan sus finanzas personales, hacen estimaciones, juzgan cuestiones políticas, y toman muchas otras decisiones en las que usan el razonamiento cuantitativo o espacial u otras nociones matemáticas que ayudan a clarificar, formular y resolver problemas.

El dominio que se evalúa en el estudio PISA/OCDE se denomina *alfabetización matemática* (Mathematical Literacy). Dicha alfabetización o competencia matemática general, como ya se ha dicho, se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Un buen nivel en el desempeño de estas capacidades muestra que un estudiante está matemáticamente alfabetizado o letrado. Reducir la noción de alfabetización a sus aspectos más funcionales puede resultar excesivamente elemental. En este estudio tiene, por el contrario, una interpretación comprensiva: debe mostrar la capacidad de los estudiantes para enfrentarse con los problemas cotidianos más variados por medio de las matemáticas.

El término *alfabetización* se ha elegido para subrayar que el conocimiento matemático y las destrezas, tal como están definidos en el currículo tradicional de matemáticas, no constituyen el foco principal de atención. Por el contrario, el énfasis está en el conocimiento matemático puesto en funcionamiento en una multitud de contextos diferentes, por medios reflexivos, variados y basados en la intuición personal, es decir, en las competencias y capacidades personales.

Por supuesto, para que este uso sea posible y viable, son necesarios una buena cantidad de conocimientos matemáticos básicos y de destrezas; tales conocimientos y destrezas forman parte de esta definición de alfabetización.



2. Procesos matemáticos: matematización.

El proyecto OCDE/PISA examina la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y transmitir ideas matemáticas de un modo efectivo al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones.

Este tipo de resolución de problemas exige a los estudiantes que se valgan de las destrezas y competencias que han adquirido a lo largo de su escolarización y sus experiencias vitales. En el proyecto OCDE/PISA, el proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real se denomina **matematización**.

Newton podría haber descrito la matematización en su magna obra “Principios matemáticos de la filosofía natural” cuando escribió: «Pero nuestro objetivo consiste sólo en localizar la cantidad y propiedades de esta fuerza a partir de los fenómenos y en aplicar lo que descubramos a algunos casos sencillos mediante los cuales, de manera matemática, podamos estimar los efectos en otros casos más complejos» (Newton, 1687).

Tradicionalmente se han distinguido distintas fases en el proceso de resolución de problemas.

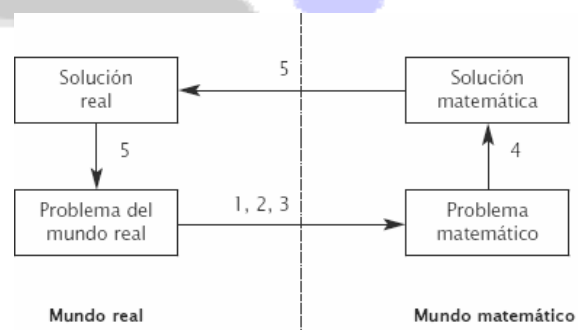
Dewey (1933), señala las siguientes:

1. Se siente una dificultad: localización de un problema.
2. Se formula y define la dificultad: delimitar el problema en la mente del sujeto.
3. Se sugieren posibles soluciones: tentativas de solución.
4. Se obtienen consecuencias: desarrollo o ensayo de soluciones tentativas.
5. Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba.

Polya (1945), por su parte, establece cuatro fases de trabajo:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

El debate anterior sobre la base teórica del marco conceptual de Matemáticas del proyecto **OCDE/PISA** trazó una descripción de la matematización en **cinco pasos**. Estos pasos se presentan en el Cuadro:



1. Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.
2. Se organiza de acuerdo a conceptos matemáticos que identifican las matemáticas aplicables.
3. Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello potencia los rasgos matemáticos de la situación y transforma el problema real en un problema matemático que la representa fielmente.
4. Se resuelve el problema matemático.
5. Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución.

Es la **actuación secuenciada** por medio de estos procesos lo que caracteriza, en sentido amplio, cómo los matemáticos hacen matemáticas, cómo las personas emplean las matemáticas en una variedad de profesiones y trabajos de manera completa y competente, cómo al abordar la respuesta a cuestiones y problemas abstraen y, por ello, *matematizan* sobre los datos de su contexto de trabajo.

El proceso de hacer matemáticas, que conocemos como *matematización*, implica en primer lugar traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Este primer proceso se conoce como *matematización horizontal*.

La **matematización horizontal** se sustenta sobre actividades como las siguientes:

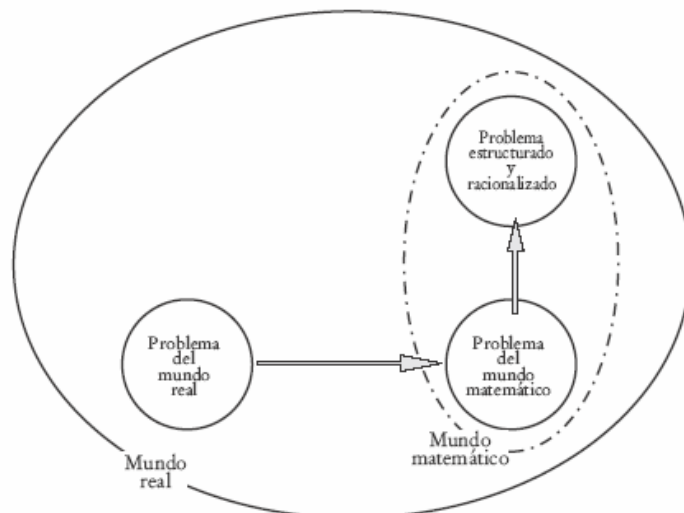
- ▶ Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
- ▶ Representar el problema de modo diferente.
- ▶ Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- ▶ Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- ▶ Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- ▶ Traducir el problema a un modelo matemático.
- ▶ Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Una vez traducido el problema a una expresión matemática, el proceso puede continuar. El estudiante puede plantear a continuación cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticas. Esta parte del proceso se denomina *matematización vertical*.

La **matematización vertical** incluye:

- ▶ Utilizar diferentes representaciones.
- ▶ Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- ▶ Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
- ▶ Argumentar.
- ▶ Generalizar.

La conexión entre ambos procesos se expresa gráficamente:



El paso posterior en la resolución de un problema implica reflexionar sobre el proceso completo de matematización y sus resultados. Los estudiantes deberán interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo.



3. Definición de la competencia matemática.

El área de matemáticas se ocupa de la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar ideas de un modo efectivo, al plantear, formular, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones.

Ejemplo 1: LA FAROLA

El ayuntamiento ha decidido colocar una farola en un pequeño jardín triangular para que alumbre este jardín en su totalidad. ¿Dónde debería colocarse?

Este problema de tipo social puede resolverse mediante la estrategia general utilizada por los matemáticos y que dentro de este marco conceptual se denomina matematizar. La actividad de **matematizar** se puede describir a partir de cinco aspectos que la componen:

1. Comenzar con un problema enmarcado en la realidad: Localizar en qué lugar del jardín debe ubicarse la farola.
2. Sistematizar el problema según conceptos matemáticos: El jardín puede representarse como un triángulo y la iluminación producida como una circunferencia en cuyo centro se encuentra la farola.
3. Gradualmente reducir la realidad mediante procedimientos como la consideración de cuáles son los rasgos importantes del problema, la generalización y formalización (y con ello se potencian los rasgos matemáticos de la situación y se transforma el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación).

El problema queda reducido a localizar el centro de una circunferencia que circunscribe un triángulo.

4. Resolver el problema matemático: Partiendo del hecho de que el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo se encuentra en el punto de intersección de las mediatrices, traza las mediatrices de dos lados cualesquiera del triángulo. El punto de intersección de las mediatrices constituye el centro de la circunferencia.

5. Dar sentido a la solución matemática en términos de la situación real: Relacionar la solución con la situación real del jardín. Reflexionar sobre la solución y reconocer, por ejemplo, que si una de las tres esquinas del jardín fuera un ángulo obtuso, esta solución no sería correcta, puesto que la ubicación de la farola quedaría fuera del jardín. Reconocer que la situación y el tamaño de los árboles del parque son otros factores que afectan a la posibilidad de aplicación de la solución matemática.

En el contexto del mundo real, a la hora de comprar, viajar, cocinar, gestionar su economía doméstica o valorar cuestiones políticas entre otras cosas, los ciudadanos se enfrentan con frecuencia a situaciones en las que el utilizar un razonamiento cuantitativo o espacial u otras aptitudes matemáticas les ayuda a aclarar, formular o resolver un problema. Este tipo de utilización de las matemáticas se basa en las destrezas que se han adquirido y practicado a través de los problemas que se presentan generalmente en los libros de texto y en las clases. Sin embargo, estas destrezas requieren la *capacidad de saber aplicarlas en un contexto menos estructurado* donde no hay indicaciones tan claras y donde el estudiante debe decidir qué datos son los importantes y cómo aplicarlos para que resulten útiles.

La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

A continuación se presentan algunas explicaciones para esclarecer la definición anterior.



Competencia matemática...

El término *competencia matemática* se ha escogido para enfatizar el uso funcional del conocimiento matemático en numerosas y diversas situaciones y de manera variada, reflexiva y basada en una comprensión profunda. Por descontado, para que este uso sea posible y viable, se requieren una gran cantidad de conocimientos y de destrezas matemáticas básicas, y tales destrezas forman parte de nuestra definición de competencia. En el sentido lingüístico, la *competencia* presupone, entre otras cosas, un amplio vocabulario y un conocimiento sustancial de las reglas gramaticales, la fonética, la ortografía, etc. A la hora de comunicarse, los seres humanos combinan estos elementos de una manera creativa en respuesta a las diferentes situaciones del mundo real en las que se ven envueltos. Del mismo modo, la competencia matemática no debe limitarse al conocimiento de la terminología, datos y procedimientos matemáticos, aunque, lógicamente, debe incluirlos, ni a las destrezas para realizar ciertas operaciones y cumplir con determinados métodos. **La competencia matemática comporta la combinación creativa de estos elementos en respuesta a las condiciones que imponga una situación externa.**

... el mundo...

El término *mundo* significa el entorno natural, social y cultural en que habita el individuo. Como postuló Freudenthal (1983): «Nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental».

... utilizar y participar...

La expresión *utilizar y participar* se aplica para abarcar el uso de las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. Conlleva también una implicación personal al *comunicar, relacionar, evaluar* e incluso *apreciar* las matemáticas y *disfrutar* con ellas. De este modo, la definición de competencia matemática engloba el uso funcional de las matemáticas en sentido estricto, así como la preparación para poder seguir estudiándolas, y los elementos estéticos y de esparcimiento de las matemáticas.

... su vida...

La expresión "*su vida*" incluye su vida privada, laboral y social con sus compañeros y familiares, así como su vida como ciudadano dentro de una comunidad.

Una capacidad fundamental que comporta esta noción de competencia matemática es la aptitud para plantear, formular, resolver e interpretar problemas a través de las matemáticas en diferentes situaciones y contextos. Los contextos varían de los puramente matemáticos a aquellos en los que no se presenta ninguna estructura matemática o ésta no es evidente de entrada: la persona que plantee o resuelva el problema deberá introducir correctamente la estructura matemática. También es importante destacar que la definición no hace exclusivamente referencia a los conocimientos matemáticos mínimos exigibles, sino también a la realización y utilización de las matemáticas en situaciones que varían entre lo diario y lo inusual, entre lo simple y lo complejo.



4. Base teórica del marco conceptual de la competencia matemática.

La definición de competencia matemática del proyecto OCDE/PISA es coherente con la teoría amplia e integradora sobre la estructura y uso del lenguaje que aparece en recientes estudios sobre la competencia sociocultural. En el trabajo de James Gee *Preamble to a Literacy Program* (1998), el término “competencia” se refiere a la utilización que hacen las personas del lenguaje. La capacidad de leer, escribir, escuchar y hablar una lengua constituye la herramienta más importante de entre las que median en la actividad social humana. De hecho, cada lengua y cada utilización de la lengua posee un intrincado diseño que está vinculado de manera compleja a diferentes funciones. Que una persona sea competente en una lengua implica que conoce muchos de los recursos de diseño de la lengua y que sabe utilizar dichos recursos en muchas y variadas funciones sociales.

De manera análoga, el considerar las matemáticas como un lenguaje implica que los estudiantes deben aprender los **elementos característicos del discurso matemático** (términos, hechos, signos, símbolos, procedimientos y destrezas para realizar ciertas operaciones de subáreas matemáticas específicas, además de la estructura de tales ideas en cada subárea) y también que deben aprender a **utilizar tales ideas para resolver problemas no rutinarios** en una variedad de situaciones definidas en términos de funciones sociales. Hay que tener en cuenta que entre los elementos característicos de las matemáticas se cuentan el reconocimiento de los términos, procedimientos y conceptos básicos que se enseñan normalmente en los colegios y también el saber cómo se utilizan y se estructuran estos elementos característicos. Por desgracia, una persona puede conocer muy bien estos elementos característicos de las matemáticas y no entender su estructura ni saber cómo utilizarlos para resolver problemas.

Organización del área de conocimiento en torno a las tareas.

El marco conceptual de la competencia matemática del proyecto OCDE/PISA debe proporcionarnos la base que desarrolle cómo los estudiantes deben ser capaces de manejar las matemáticas de una manera bien fundada al hacer frente a problemas del mundo real.

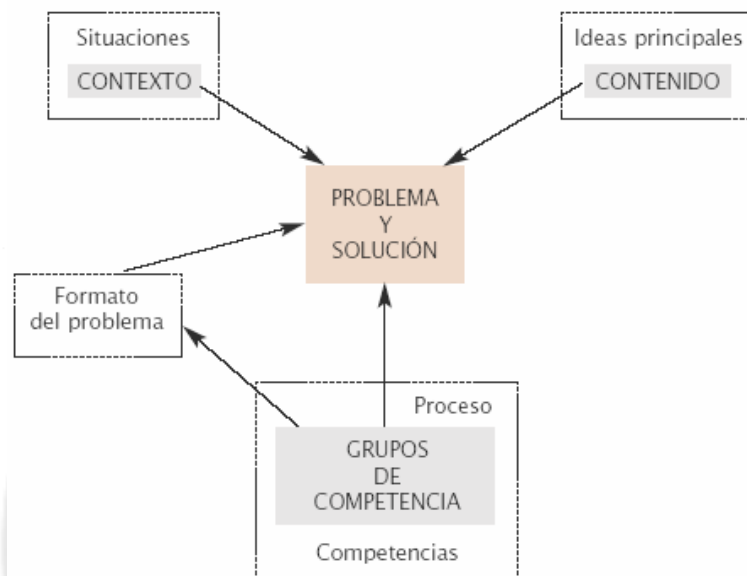
Para desarrollar la competencia matemática, al igual que el resto de competencias, debemos definir las tareas. Podemos distinguir cinco elementos:

1. Las **situaciones o contextos** en que se sitúan los problemas
2. Los **contenidos matemáticos** de los que hay que valerse para resolver los problemas, organizado según ciertas *ideas* principales
3. Las **competencias** que deben activarse para vincular el mundo real en el que se generan los problemas con las matemáticas, y, por tanto, para resolver los problemas.
4. *Nivel de* **complejidad** de las tareas
5. Los **recursos** materiales y la **organización** de la actividad.

El grado de **competencia matemática** de una persona se observa en el modo en que utiliza sus destrezas y conocimientos matemáticos al resolver problemas. Los problemas (y su resolución) pueden presentarse en una gran variedad de situaciones o contextos en la experiencia de una persona.

El siguiente elemento del mundo real que debe tenerse en cuenta al considerar la competencia matemática es el **contenido matemático** al que una persona recurre a la hora de resolver un problema. El contenido matemático puede explicarse mediante cuatro categorías que engloban los tipos de problemas que surgen de la interacción con los hechos del día a día y que se basan en una concepción del modo en que el contenido matemático se presenta ante la gente: las “ideas principales”: *cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre*. Se trata de un enfoque algo diferente al que resultaría familiar desde la perspectiva de la ense-

ñanza de las matemáticas y las tendencias curriculares típicas de las escuelas. Sin embargo, las ideas principales engloban ampliamente toda la gama de temas matemáticos que se espera que hayan aprendido los estudiantes.



Los procesos matemáticos que los estudiantes aplican al tratar de resolver los problemas se conocen como **competencias matemáticas**. Tres **grupos de competencia** (*grupo de reproducción, de conexión y de reflexión*) condensan los diferentes procesos cognitivos necesarios para resolver diferentes tipos de problemas. Estos grupos reflejan el modo en que los estudiantes utilizan normalmente los procesos matemáticos al resolver los problemas que surgen mientras se relacionan con su mundo.

Debe hacerse hincapié en que los tres elementos descritos son de naturaleza diferente. Mientras que las **situaciones o contextos** definen los ámbitos de problemas del mundo real, las **ideas principales** reflejan el modo en que observamos el mundo a través de un cristal matemático, y las **competencias** son el núcleo de la competencia matemática. Sólo cuando los estudiantes dispongan de ciertas competencias serán capaces de resolver acertadamente los problemas que se planteen.

1) Situaciones o contextos.

Un aspecto importante de la competencia matemática lo constituye el involucrarse en las matemáticas, es decir, ejercitar y utilizar las matemáticas en una amplia variedad de situaciones. Se ha reconocido, en efecto, que al resolver un individuo asuntos susceptibles de tratamiento matemático, las representaciones y los métodos que escoge a menudo dependen de las situaciones en las que se presentan los problemas.

La **situación** es la parte del mundo del estudiante en la que se localizan los ejercicios que se le plantean. Se sitúa a una distancia diversa del estudiante mismo. Dentro de la evaluación OCDE/PISA, la situación más cercana es la vida personal del estudiante. Luego se sitúan la vida escolar, la vida laboral y el ocio, seguidas de la vida en la comunidad local y la sociedad tal y como se presentan en la vida diaria. A mucha distancia de todas ellas están las situaciones de tipo científico. Para los problemas que se van a presentar, se definen y utilizan cuatro tipos de situaciones: **personal, educacional/profesional, pública y científica**.



Las **situaciones personales** están relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. En el conjunto de ítems liberados hay doce que presentan una situación personal, están vinculados a una actividad general que el alumno percibe o realiza como individuo.

Las **situaciones educativas o laborales** las encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen al alumno una tarea que le impone una actividad matemática para encontrar su respuesta.

Las **situaciones públicas** se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observen un aspecto determinado de su entorno. Requieren que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública: repercusiones de los cambios de divisas, exportaciones, temas de seguridad ciudadana, interpretación de encuestas de opinión, criterios de valoración para productos comerciales, ...

Finalmente, las **situaciones científicas** son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático: fenómenos de crecimiento de los miembros de una población, problemas medioambientales derivados de la emisión de gases, terremotos, reciclaje de residuos, vuelos espaciales, ...

El contexto de un ejercicio lo constituye el modo concreto en que ésta se presenta dentro de una situación.

Ejemplo 2: CUENTA DE AHORRO.

Se ingresan 1.000 zeds en una cuenta de ahorro en un banco. Existen dos opciones: o bien obtener un interés anual del 4%, o bien obtener una prima inmediata de 10 zeds y un interés anual del 3%. ¿Qué opción es mejor al cabo de un año? ¿Y al cabo de dos años?

La **situación** de esta pregunta es “finanzas y bancos”, una situación de la comunidad local y la sociedad que se designa como “**pública**” y el contexto se refiere al dinero (zeds) y a los tipos de interés que ofrece una cuenta bancaria. Este tipo de problema podría ser parte de la práctica o experiencia del joven en su vida real.

Esto se puede contrastar con los problemas que se observan con frecuencia en los textos escolares de matemáticas, en los que el objetivo principal consiste más en practicar las matemáticas que en resolver un problema real. Esta autenticidad en la utilización de las matemáticas resulta un aspecto relevante del diseño y el análisis de las preguntas del proyecto OCDE/PISA y está estrechamente relacionada con la definición de la competencia matemática.

La situación y el contexto de un problema también puede considerarse en términos de la **distancia** entre el problema y las matemáticas implicadas. Si un ejercicio hace referencia únicamente a estructuras, símbolos y objetos matemáticos y no alude a cuestiones ajenas al universo matemático, el contexto del ejercicio se considera **intramatemático** y dicho ejercicio se clasifica dentro de la clase de situación “científica”.



De manera más típica, los problemas que aparecen en la experiencia del día a día del estudiante no se plantean en términos matemáticos explícitos, sino que hacen referencia a objetos del mundo real. Los contenidos de estos ejercicios se denominan **extramatemáticos** y, entonces, el estudiante debe traducir estos contextos de los problemas a una formulación matemática. Por lo general, el proyecto OCDE/PISA hace hincapié en las tareas que pueden encontrarse en una situación real y que poseen un contexto auténtico para el uso de las matemáticas de un modo que influya en la solución y en su interpretación.

2) Contenido Matemático: las cuatro ideas principales.

Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo natural, social y mental. En las escuelas, el currículo de matemáticas se ha organizado de una manera lógica alrededor de las diferentes líneas de contenido (p. ej., aritmética, álgebra, geometría) y sus temas subordinados, que reflejan las ramas históricamente establecidas del pensamiento matemático y que facilitan el desarrollo de un plan de estudios estructurado.

No obstante, en el mundo real, los fenómenos susceptibles de un tratamiento matemático no aparecen organizados de un modo tan lógico. El problema del tablero de feria descrito en el ejemplo siguiente constituye un ejemplo de problema que recurre a diversas áreas matemáticas.

Ejemplo 3. El tablero de feria.

En una feria, los jugadores lanzan monedas sobre un tablero a cuadros. Si la moneda cae tocando una línea divisoria, el jugador la pierde. Si rueda y cae fuera del tablero, la recupera. Pero si la moneda queda totalmente dentro de un cuadrado, el jugador recupera la moneda y se lleva un premio.

¿Cuál es la probabilidad de ganar en este juego?



La organización fenomenológica del contenido matemático no es nueva. Dos publicaciones muy conocidas, *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (Steen, 1990) y *Mathematics: The science of patterns* (Devlin, 1994) han descrito las matemáticas de este modo. Sin embargo, se han utilizado diferentes maneras para etiquetar este enfoque y denominar las diferentes categorías fenomenológicas. Entre las diferentes propuestas de etiquetado se encuentran *ideas profundas*, *grandes ideas*, *ideas fundamentales*, *conceptos principales*, *ideas principales*, *conceptos subyacentes*, *áreas principales* o *problemática*. En el marco de matemáticas del proyecto OCDE/PISA se utiliza la etiqueta ***ideas principales***.

Existen muchas ideas principales posibles. Las publicaciones mencionadas arriba, por sí solas, ya hacen referencia al modelo, la dimensión, la cantidad, la incertidumbre, la forma, el cambio, el cómputo, el razonamiento y la comunicación, el movimiento y el cambio, la simetría y la regularidad, y la posición. ¿Cuáles de estas ideas deberían utilizarse dentro del marco de matemáticas del proyecto OCDE/PISA? Con el objeto de centrar el área de conocimiento matemática, es importante seleccionar un conjunto de problemáticas surgidas de la **evolución histórica de las matemáticas** que englobe una variedad y profundidad suficiente para dejar ver los elementos esenciales de las matemáticas y que represente o incluya también los contenidos curriculares convencionales de las matemáticas de manera satisfactoria.



Durante siglos, las matemáticas consistieron preferentemente en la ciencia de los **números**, junto a una **geometría** relativamente concreta. Antes del año 500 a.C., Mesopotamia, Egipto y China vieron el origen del concepto de número. Se desarrollaron operaciones con números y cantidades, entre ellas cantidades resultantes de mediciones geométricas.

Entre los años 500 a.C. y 300 d.C. tuvo lugar la era de la matemática griega, que se centraba fundamentalmente en el estudio de la geometría como teoría axiomática. Los griegos se encargaron de redefinir las matemáticas como una ciencia unificada a partir de los **números** y las **formas**.

El siguiente cambio importante tuvo lugar entre los años 500 y 1300 d.C. en el mundo islámico, India y China, cuando el álgebra pasó a constituir una rama de las matemáticas. Con ello se estableció el estudio de las **relaciones**.

Con las invenciones independientes del cálculo diferencial (el estudio del cambio, el crecimiento y el límite) por parte de Newton y Leibniz en el siglo XVII, las matemáticas se convirtieron en un **estudio integrado del número, la forma, el cambio y las relaciones**.

Los siglos XIX y XX vivieron diferentes explosiones del conocimiento matemático y del alcance de los fenómenos y problemas que podían tratarse mediante las matemáticas, especialmente los aspectos relacionados con la aleatoriedad y la indeterminación. Este desarrollo comportó que cada vez fuera más difícil hallar respuestas sencillas a la pregunta *¿qué son las matemáticas?* En este nuevo milenio, mucha gente considera las matemáticas como la ciencia de las regularidades (en un sentido general). De esta manera, puede realizarse una elección de ideas principales que refleje este desarrollo: regularidades en el dominio de la *cantidad*, del *espacio* y la *forma*, y del *cambio* y las *relaciones*, constituyen los conceptos centrales y esenciales de cualquier descripción de las matemáticas y conforman el núcleo de cualquier currículum, ya sea de educación secundaria o universitaria. No obstante, ser competente en matemáticas significa algo más. Resulta esencial tratar con la incertidumbre desde una perspectiva matemática y científica. Por esta razón, los elementos de la teoría de la probabilidad y la estadística dan paso a la cuarta idea principal: la **incertidumbre**.

Por tanto, en el proyecto OCDE/PISA 2003 se utiliza la siguiente lista de ideas principales para adaptarse a los requisitos del desarrollo histórico, la cobertura del área y la plasmación de las **líneas principales del currículum escolar**:

- ▶ *cantidad*
- ▶ *espacio y forma*
- ▶ *cambio y relaciones*
- ▶ *incertidumbre*

La concepción básica de una idea principal es un conjunto que engloba hechos y conceptos y que cobra sentido y puede encontrarse a lo largo de un gran número de situaciones diferentes. Debido a su misma naturaleza, cada idea principal puede percibirse como una especie de noción general que trata algún tipo de dimensión de contenido matemático. Esto implica que las ideas principales no pueden definirse de manera exacta en función de otra existente, porque no se puede trazar una línea de separación clara entre unas y otras. Por el contrario, cada una de ellas representa una perspectiva o punto de vista que puede concebirse como poseedora de un núcleo, un centro de gravedad y, de algún modo, un área circundante difusa que permite la intersección con otras ideas principales. En principio, una idea principal posee una intersección con cualquier otra idea principal. Las **cuatro ideas principales** se resumen en el apartado siguiente y se tratan con mayor profundidad más adelante.



Cantidad

Esta idea principal se centra en la necesidad de cuantificar para organizar el mundo. Las características importantes engloban la comprensión del tamaño relativo, el reconocimiento de las regularidades numéricas y la utilización de los números para representar cantidades y atributos cuantificables de los objetos del mundo real (recuentos y medidas). Además, la *cantidad* tiene que ver con el procesamiento y comprensión de los números que de diferentes maneras se nos presentan.

Un aspecto importante al tratar con la cantidad es el razonamiento cuantitativo. Los componentes esenciales del razonamiento cuantitativo son el sentido para los números, la representación de los números de diferentes maneras, la comprensión del significado de las operaciones, la percepción de la magnitud de los números, los cálculos matemáticamente elegantes, la estimación y el cálculo mental.

Espacio y forma

Las regularidades se encuentran en todas partes: en el habla, la música, los vídeos, el tráfico, las construcciones y el arte. Las **formas** pueden considerarse como regularidades: casas, edificios de oficinas, puentes, estrellas de mar, copos de nieve, callejeros, hojas de trébol, cristales y sombras. Las regularidades geométricas pueden servir como unos modelos relativamente simples de muchas clases de hechos, y su estudio resulta posible y deseable en todos los niveles (Grünbaum, 1985).

El **estudio de la forma y las construcciones** exige buscar similitudes y diferencias al analizar los componentes formales y al reconocer las formas en diferentes representaciones y diferentes dimensiones. El estudio de las formas está estrechamente vinculado al concepto de *percepción espacial*. Esto comporta aprender a reconocer, explorar y conquistar, para vivir, respirar y movernos con mayor conocimiento en el espacio en que vivimos (Freudenthal, 1973). Para conseguirlo es preciso comprender las propiedades de los objetos y sus posiciones relativas. Debemos ser conscientes de cómo vemos las cosas y de por qué las vemos de ese modo. Debemos aprender a orientarnos por el espacio y a través de las construcciones y formas. Ello significa entender la relación entre formas e imágenes, o representaciones visuales, tales como la relación entre una ciudad real y las fotografías y callejeros de esa ciudad. También presupone entender la representación en dos dimensiones de los objetos tridimensionales, la formación de las sombras y cómo interpretarlas, qué es la perspectiva y cómo funciona.

Cambio y relaciones

Cualquier fenómeno natural constituye una manifestación de cambio; el mundo que nos rodea presenta una gran cantidad de relaciones temporales y permanentes entre los diferentes fenómenos. Son ejemplo de ello los organismos, que cambian a medida que crecen, el ciclo de las estaciones, el flujo y reflujo de las mareas, los ciclos de desempleo, los cambios climatológicos y los índices bursátiles.

Algunos de estos procesos de cambio comportan **funciones** matemáticas simples y pueden describirse o modelarse mediante ellas: funciones lineales, exponenciales, periódicas o logarítmicas, tanto discretas como continuas.



No obstante, muchas relaciones pertenecen a categorías diferentes y, a menudo, el análisis de los datos resulta esencial para determinar qué tipo de relación se produce. A menudo las relaciones matemáticas adoptan la forma de **ecuaciones** o **desigualdades**, pero también pueden darse relaciones de una naturaleza más general (p. ej., equivalencia, divisibilidad o inclusión, entre otras).

El **pensamiento funcional** —es decir, el pensar sobre y en términos de relaciones— es uno de los objetivos disciplinarios más importantes de la enseñanza de las matemáticas (MAA, 1923). Las relaciones pueden darse en una gran variedad de representaciones diferentes, entre ellas la simbólica, la algebraica, la tabular y la geométrica. Las diferentes representaciones sirven a propósitos diferentes y poseen propiedades diferentes. Por esta razón, la traducción entre las diferentes representaciones tiene a menudo una importancia fundamental a la hora de ocuparse de diversas situaciones y tareas.

Incertidumbre

La actual “sociedad de la información” proporciona un gran número de informaciones que a menudo se presentan como precisas, científicas y en diverso grado ciertas. No obstante, en la vida diaria nos enfrentamos a resultados de elecciones inciertos, puentes que desmoronan, caídas de la bolsa, predicciones del tiempo poco fidedignas, predicciones desafortunadas del crecimiento de la población, modelos económicos que no funcionan bien y muchas otras demostraciones de la incertidumbre del mundo en que vivimos.

La *incertidumbre* está pensada para sugerir dos temas relacionados: los datos y el azar. Estos dos fenómenos son objeto de estudio matemático por parte de la estadística y de la probabilidad, respectivamente. Las recientes recomendaciones relativas a los currículos escolares son unánimes al sugerir que la **estadística** y la **probabilidad** deberían ocupar un lugar mucho más importante que el que han tenido en el pasado (Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, 1982; LOGSE, 1990; MSEB, 1990; NCTM, 1989; NCTM, 2000).

Actividades y conceptos matemáticos importantes de esta área son la recogida de datos, el análisis y la presentación /visualización de los mismos, la probabilidad y la deducción.

3) Competencia matemática.

La tercera variable se refiere a las competencias que se quieren mostrar, ya que se supone que cada ítem propone activar unas determinadas habilidades y capacidades matemáticas en los alumnos. El informe PISA se refiere a una competencia matemática general que, en ocasiones, denomina *alfabetización matemática*. Este concepto de competencia en el estudio PISA/OCDE pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas, es decir, pone el acento en capacidades, habilidades y ejecución de procedimientos.

Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso. Los tipos de competencias seleccionados permiten establecer variables de proceso para el estudio PISA; esas competencias son:

1. Pensar y razonar.
2. Argumentar.
3. Comunicar.



4. Modelar.
5. Plantear y resolver problemas.
6. Representar.
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
8. Emplear soportes y herramientas.

El estudio PISA considera que los logros de los estudiantes en matemáticas se pueden expresar mediante este conjunto de competencias, ya que describen los procesos que se requieren para un dominio matemático general.

Conviene observar que las tres primeras son competencias cognitivas de carácter **general**, mientras que las cuatro siguientes son competencias matemáticas **específicas**, relacionadas con algún tipo de análisis conceptual. A continuación se presentan algunos indicadores que ejemplifican cada una de las competencias.

1. Pensar y Razonar

Incluye las capacidades de:

- ▶ Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿cuántos hay? ¿cómo encontrarlo?, si es así, ...entonces, etc.).
- ▶ Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones.
- ▶ Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas).
- ▶ Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

2. Argumentar

Incluye las capacidades de:

- ▶ Conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático.
- ▶ Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos.
- ▶ Disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede (o no) ocurrir y por qué?).
- ▶ Crear y expresar argumentos matemáticos.

3. Comunicar

Incluye las capacidades de:

- ▶ Expresarse en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita,
- ▶ Entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita.

4. Modelar

Incluye las capacidades de:

- ▶ Estructurar el campo o situación que va a modelarse.
- ▶ Traducir la realidad a una estructura matemática.
- ▶ Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.
- ▶ Trabajar con un modelo matemático.
- ▶ Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.
- ▶ Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).
- ▶ Dirigir y controlar el proceso de modelización.

5. Plantear y resolver problemas

Incluye las capacidades de:

- ▶ Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados).
- ▶ Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.



6. Representar

Incluye las capacidades de:

- ▶ Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.
- ▶ Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

Incluye las capacidades de:

- ▶ Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.
- ▶ Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.
- ▶ Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
- ▶ Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

8. Emplear soportes y herramientas.

Incluye las capacidades de:

- ▶ Conocer y ser capaz de utilizar diferentes soportes y herramientas (entre ellas, herramientas de las tecnologías de la información) que pueden ayudar en la actividad matemática,
- ▶ conocer las limitaciones de dichos soportes y herramientas.

4) Nivel de complejidad: variables de proceso.

Cada una de las competencias enunciadas admite diferentes **niveles de profundidad**; las tareas propuestas a los estudiantes deben plantear diferentes tipos y niveles de demandas cognitivas. La tercera variable establecida para caracterizar los ítems en la evaluación PISA es la relativa al **nivel de complejidad cognitiva** con que se requiere la actuación competente de los estudiantes.

Los expertos del estudio PISA/OCDE consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ítems con los que evaluar las competencias:

- ▶ **Reproducción** (primer nivel): Reproducción y procedimientos rutinarios.
- ▶ **Conexiones** (segundo nivel): Conexiones e integración para resolver problemas estándar.
- ▶ **Reflexión** (tercer nivel): Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

Reproducción (primer nivel de complejidad)

En el nivel de reproducción se engloban aquellos ejercicios que son relativamente familiares y que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas.

Conexiones (segundo nivel de complejidad)

El nivel de conexiones permite resolver problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.



Reflexión (tercer nivel de complejidad)

Este nivel de complejidad moviliza competencias que requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Las tareas de este nivel requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados.

5) Los recursos materiales y la organización de la actividad.

Señalar en este apartado la importancia del método pedagógico a emplear porque, en función del mismo, organizaremos los recursos materiales y la actividad con los alumnos. Señalar además las sugerencias del Consejo de Europa, sobre todo en la enseñanza de las lenguas relacionadas con el Portfolio, en las que se aconseja el “**aprendizaje en acción**” como referente metodológico para que el alumno adquiera un aprendizaje significativo y, más concretamente, las competencias básicas.

Resulta obvio indicar, aunque lo remarcaremos nuevamente, la necesidad de un modelo pedagógico basado en el “**aprendizaje por tareas**”.

Los modelos pedagógicos están ahí desde hace muchos años. Lo importante en este caso es aplicar, en función de la subcompetencia, el modelo adecuado. Por ejemplo, si en la competencia lingüística queremos trabajar con nuestros alumnos la dicción y la pronunciación, habrá tareas específicas para esto (leer en silencio obviamente no es una actividad que trabaje la dicción y la pronunciación).





Ejemplificaciones de pruebas empleadas en PISA.

Título	Contenido	Situación	Competencia / Proceso	Formato de respuesta
Caminar 1	Cambios y relaciones	Personal	Reproducción	Abierta

Caminar 1

La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.



Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P donde: n = número de pasos por minuto, y P = longitud del paso en metros.

Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.

Título	Contenido	Situación	Competencia / Proceso	Formato de respuesta
Caminar 1	Cambios y relaciones	Personal	Conexiones	Abierta

Caminar 2

Bernardo sabe que sus pasos son de 0,80 metros. El caminar de Bernardo se ajusta a la fórmula. Calcula la velocidad a la que anda Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Muestra tus cálculos.

Título	Contenido	Situación	Competencia / Proceso	Formato de respuesta
Terremoto	Incertidumbre	Científica	Reflexión	Elección entre varias opciones

Terremoto.

Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que éstos ocurren. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos.

Un geólogo dijo: *En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres.*

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

- A. $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13,3$ por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la ciudad de Zed.
- B. $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.
- C. La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.
- D. No se puede decir lo que sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.



ANEXO I.

SUBCOMPETENCIAS Y NIVELES DE COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS (GRUPOS DE COMPETENCIA).

Grupos de competencia

El proyecto OCDE/PISA ha elegido describir las acciones cognitivas que estas competencias engloban de acuerdo a tres *grupos de competencia*: el grupo de **reproducción**, el grupo de **conexión** y el grupo de **reflexión**. En las secciones siguientes se definen los tres grupos y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de las competencias dentro de cada grupo.

1. El grupo de reproducción

Las competencias de este grupo implican esencialmente a la reproducción del conocimiento estudiado. Incluyen aquellas que se emplean más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.

1. **Pensar y razonar.**

Formular las preguntas más simples («¿cuántos...?», «¿cuánto es...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»); distinguir entre definiciones y afirmaciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.

2. **Argumentación.**

Seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados.

3. **Comunicación.**

Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.

4. **Construcción de modelos.**

Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo.

5. **Formulación y resolución de problemas.**

Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera.

6. **Representación.**

Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado.

El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.

7. **Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.**

Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.



8. Empleo de soportes y herramientas.

Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en con textos, situaciones y procedimientos similares a los ya conocidos y practicados a lo largo del aprendizaje.

Las preguntas que miden las competencias del grupo de reproducción se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: **reproducir material practicado y realizar operaciones rutinarias.**

Ejemplos de preguntas del grupo de reproducción

Matemáticas, ejemplo 5:

Resuelve la ecuación $7x - 3 = 13x + 15$

Matemáticas, ejemplo 6:

¿Cuál es la media de 7, 12, 8, 14, 15, 9?

Matemáticas, ejemplo 7:

Escribe 69% en forma de fracción

Matemáticas, ejemplo 8:

La línea m se denomina _____ de la circunferencia.



Matemáticas, ejemplo 9:

Se ingresan 1.000 zeds en una cuenta de ahorro en un banco con un tipo de interés del 4%. ¿Cuántos zeds habrá en la cuenta al cabo de un año?

2. El grupo de conexión

Las competencias del grupo de *conexión* se apoyan sobre las del grupo de *reproducción*, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.

Además de las competencias descritas para el grupo de *reproducción*, las competencias del grupo de *conexión* comprenden las siguientes:

1. Pensar y razonar.

Formular preguntas («¿cómo hallamos...?», «¿qué tratamiento matemático damos...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.

2. Argumentación.



Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (p. ej., «¿qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?»).

3. Comunicación.

Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.

4. Construcción de modelos.

Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes.

Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad), y sabiendo también comunicar los resultados del modelo.

5. Formulación y resolución de problemas.

Plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).

6. Representación.

Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.

7. Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.

Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares.

8. Empleo de soportes y herramientas.

Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en contextos, situaciones y maneras diferentes a las introducidas y practicadas a lo largo del aprendizaje. Las preguntas de este grupo normalmente exigen alguna prueba de la integración y vinculación del material derivado de las diferentes ideas principales, de las diversas líneas curriculares matemáticas o de la conexión de las varias representaciones de un problema.

Las preguntas que miden las competencias del grupo de *conexión* se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: **integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.**



Ejemplos de preguntas del grupo de conexión

Un primer ejemplo del grupo de *conexión* es el del Ejemplo 3, *Cuenta de ahorro*, aparecido anteriormente. A continuación se presentan otros.

Matemáticas, ejemplo 10: DISTANCIA

María vive a dos kilómetros de su colegio y Martín a cinco.
¿A qué distancia viven el uno del otro?

Cuando se mostró este problema a los profesores, muchos de ellos lo rechazaron por considerarlo demasiado fácil (se ve rápidamente que la respuesta es 3). Otro grupo de profesores argumentaron que no era una pregunta adecuada, porque no había respuesta (querían decir que no hay una única respuesta numérica). Otros argumentaron que no era adecuado porque había varias respuestas posibles, dado que, sin más información, la mayoría de alumnos podían concluir que vivían a entre 3 y 7 kilómetros de distancia

(una respuesta que no es deseable para una pregunta de evaluación). Unos pocos pensaron por el contrario que se trataba de una pregunta excelente, porque exige entender la pregunta, porque es un problema real dado que no incluye una estrategia conocida por el estudiante, y porque es una cuestión matemática preciosa aunque no se sepa cómo van a resolverla los estudiantes. Esta última interpretación es la que vincula el problema con el grupo de competencias de *conexión*.

Matemáticas, ejemplo 11: ALQUILER DE OFICINAS

Los dos siguientes anuncios aparecieron en un diario de un país cuya unidad monetaria es el zed.

EDIFICIO A	EDIFICIO B
Se alquilan oficinas	Se alquilan oficinas
58-95 metros cuadrados 475 zeds al mes	35-260 metros cuadrados 90 zeds por metro cuadrado al año
100-120 metros cuadrados 800 zeds al mes	

Si una empresa está interesada en alquilar una oficina de 110 metros cuadrados en ese país durante un año, ¿en qué edificio de oficinas, A o B, deberá alquilar la oficina para conseguir el precio más bajo? Escribe tus cálculos. [© IEA/TIMSS]

Matemáticas, ejemplo 12: LA PIZZA

Una pizzería ofrece dos pizzas redondas del mismo grosor pero de diferentes tamaños. La pequeña tiene un diámetro de 30 cm y cuesta 30 zeds. La grande tiene un diámetro de 40 cm y cuesta 40 zeds. [© PRIM, Stockholm Institute of Education]

¿Qué pizza es la mejor opción en relación a lo que cuesta? Escribe tu razonamiento.



3. El grupo de reflexión

Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más «originales» (o inusuales) que los del grupo de *conexión*.

Además de las competencias descritas para el grupo de *conexión*, entre las competencias del grupo de *reflexión* se encuentran las siguientes:

1. **Pensar y razonar.**

Formular preguntas («¿cómo hallamos...?», «¿qué tratamiento matemático damos...?», «¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.); distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.

2. **Argumentación.**

Razonar matemáticamente de manera sencilla, distinguiendo entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos de diferentes tipos; emplear la heurística (p. ej., «qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?», «¿cuáles son las propiedades esenciales?», «¿cómo están relacionados los diferentes objetos?»).

3. **Comunicación.**

Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o explicar cálculos y resultados (normalmente de más de una manera) a explicar asuntos que implican relaciones complejas, entre ellas relaciones lógicas. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.

4. **Construcción de modelos.**

Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo, traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos complejos o muy diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes y pasar alternando de los diferentes modelos (y sus resultados) a la «realidad», incluyendo aquí aspectos de la comunicación de los resultados del modelo: recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción de modelos y validar el modelo resultante. Conlleva también reflexionar analizando, realizando críticas y llevando a cabo una comunicación más compleja sobre los modelos y su construcción.

5. **Formulación y resolución de problemas.**

Exponer y formular problemas mucho más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones). También conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.

6. **Representación.**

Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación



de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas. También conlleva combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.

7. Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.

Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico ya practicado en situaciones y contextos desconocidos y manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos. También conlleva la habilidad de saber tratar con expresiones y afirmaciones complejas y con lenguaje simbólico o formal inusual, y realizar traducciones entre este lenguaje y el lenguaje natural.

8. Empleo de soportes y herramientas.

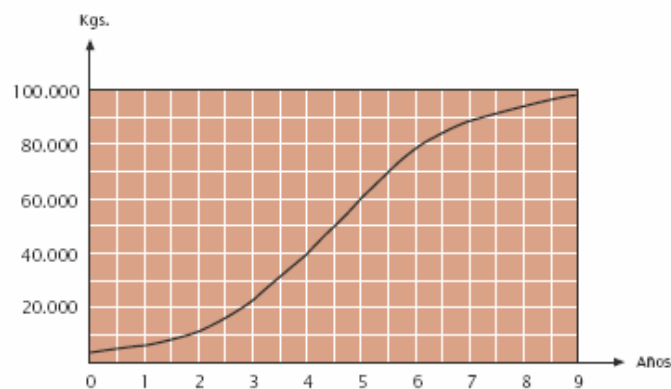
Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares o inusuales en contextos, situaciones y formas bastante diferentes a las ya introducidas y practicadas. También conlleva reconocer las limitaciones de tales soportes y herramientas.

Las preguntas de evaluación que miden las competencias del grupo de reflexión se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: **razonamiento avanzado, argumentación, abstracción, generalización y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos.**

Ejemplos de preguntas del grupo de reflexión

Matemáticas, ejemplo 13: CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN DE PECES

Se repobló con peces un canal fluvial. El gráfico muestra un modelo de cómo ha crecido el peso total de los peces en el canal fluvial.



Supón que un pescador decide esperar unos años antes de empezar a pescar los peces del canal fluvial. ¿Cuántos años deberá esperar si desea maximizar el número de peces que pueda coger anualmente a partir de ese año? Razona tu respuesta.



Matemáticas, ejemplo 14: PRESUPUESTO

En un determinado país, el presupuesto nacional de defensa fue de 30 millones (en la moneda del país) en 1980. El presupuesto total de ese año fue de 500 millones. Al año siguiente, el presupuesto de defensa pasó a 35 millones, mientras que el presupuesto total fue de 605 millones. La inflación del período comprendido entre los dos presupuestos alcanzó el 10 por ciento.

- a) Te invitan a dar una conferencia en una asociación pacifista. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha disminuido en este período. Explica cómo lo harías.
- b) Te invitan a dar una conferencia en una academia militar. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha aumentado en este período. Explica cómo lo harías.

Fuente: De Lange y Verhage (1992). Reproducción autorizada.

Resumen de los procesos matemáticos en la evaluación OCDE/PISA de matemáticas

Las descripciones de competencia de las páginas anteriores podrían utilizarse para clasificar las preguntas de matemáticas y asignarlas así a uno de los grupos de competencia. Una manera de hacerlo sería analizar los requisitos de cada pregunta y luego considerar cada una de las competencias para la pregunta en cuestión: uno de los tres grupos proporcionará la descripción más ajustada de los requisitos de la pregunta en relación a esa competencia. Si se considera que alguna de las competencias se ajusta a la descripción del grupo de **reflexión**, entonces la pregunta se asigna a ese grupo de competencia. Si no ocurre eso, pero se considera que alguna de las competencias se ajusta a la descripción del grupo de **conexión**, entonces la pregunta se asigna a ese grupo. Si no se da ninguno de estos casos, la pregunta se asignaría al grupo de **reproducción**, puesto que se consideraría que todas las competencias que moviliza se ajustarían a la descripción de las competencias de ese grupo.

